

# 4. Análisis de Sistemas Realimentados

Parte 2

**Panorama:**

- Estabilidad y respuesta en frecuencia
- El criterio de estabilidad de Nyquist
- Márgenes de estabilidad
- Robustez

## Estabilidad y respuesta en frecuencia

Una herramienta clásica y durable para determinar la estabilidad de un lazo de realimentación es el **criterio de estabilidad de Nyquist**. En el criterio de Nyquist, la estabilidad del sistema a lazo cerrado se determina a partir de la respuesta en frecuencia del sistema a lazo abierto,  $G_0(s)K(s)$ , que se grafica en un **diagrama polar**.

Ejemplo:

$$G_0(s)K(s) = \frac{k_0}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}$$

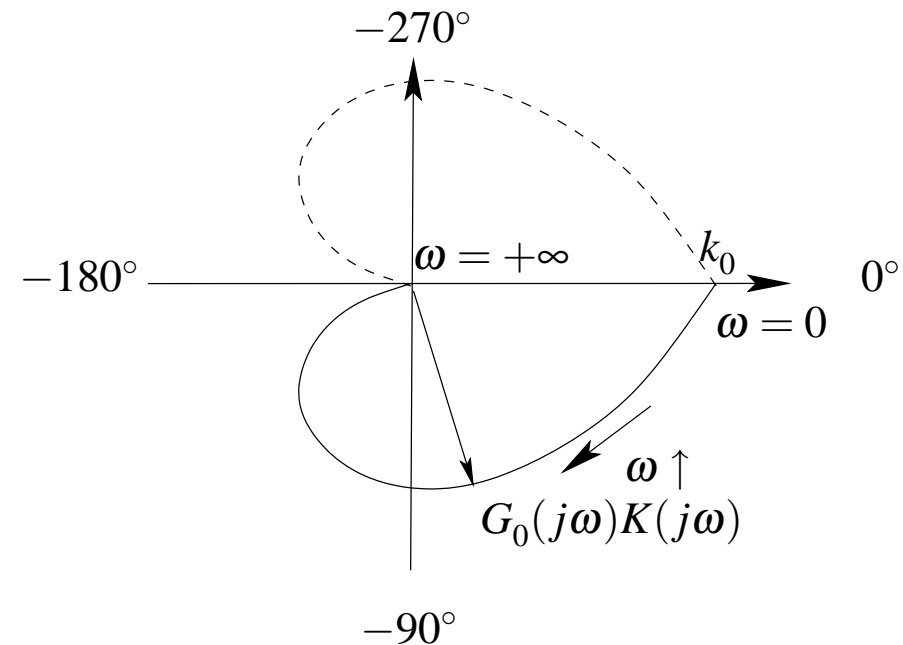


Diagrama polar de  $G_0(s)K(s)$

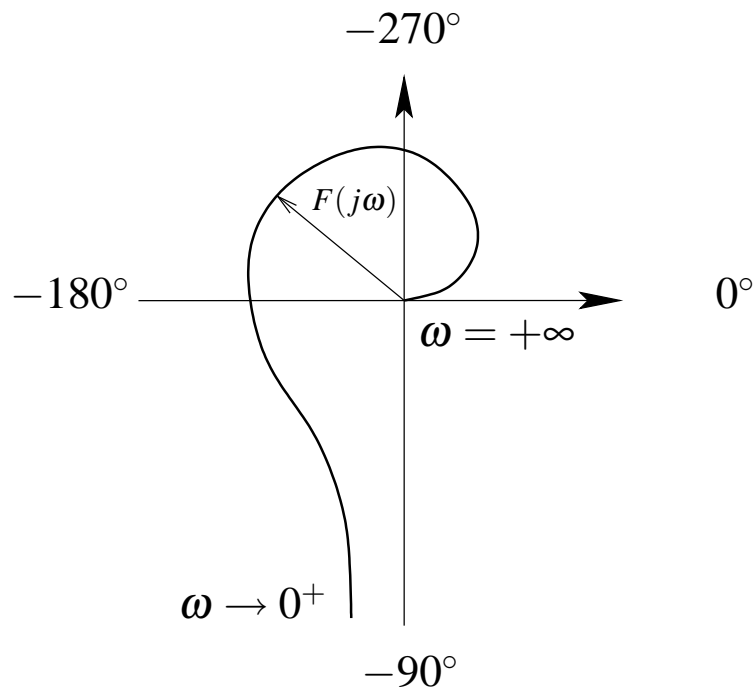
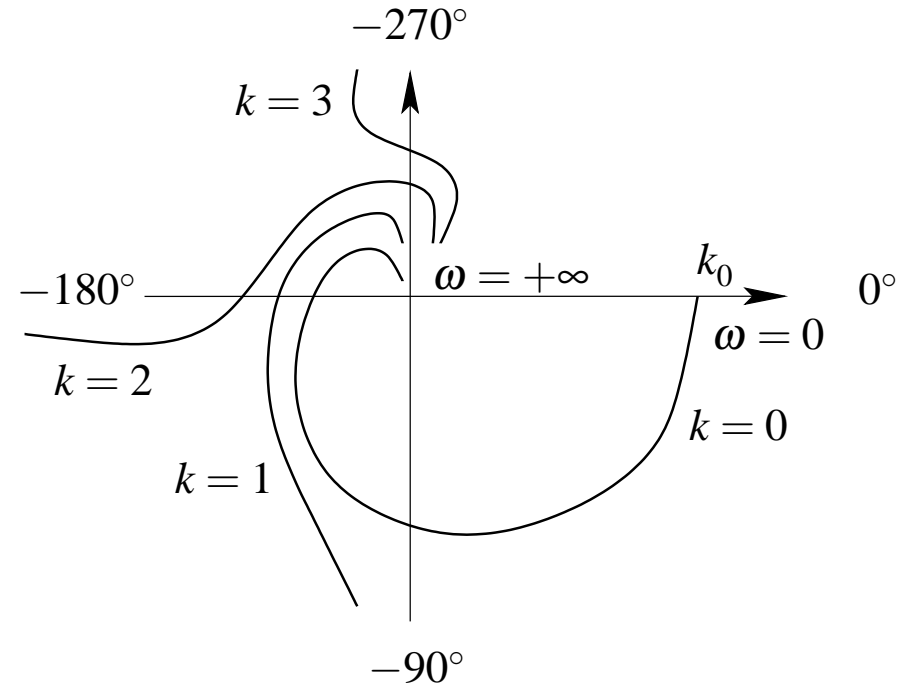
## Sobre el trazado de diagramas polares

Consideramos el diagrama polar de una función transferencia general de la forma

$$F(s) = \frac{k_0 \prod_{i=0}^m (\beta_i s + 1)}{s^k \prod_{i=1}^n (\alpha_i s + 1)}$$

1. Extremo de bajas frecuencias,  $\omega \rightarrow 0$ . Depende del número de polos en 0 de  $F(s)$ :
  - Si  $k = 0$ , el diagrama comienza en el valor real  $\lim_{\omega \rightarrow 0} F(s) = k_0$ , con la fase de  $k_0$  (0 o  $\pi$  rad).
  - Si  $k \geq 1$ , el diagrama comienza en  $\infty$  con fase  $-k_0 \frac{\pi}{2}$  rad.
2. Extremo de altas frecuencias,  $\omega \rightarrow \infty$ . Para funciones transferencia estrictamente propias, el diagrama termina en el origen, con una fase que tiende a  $-(n + k - m) \frac{\pi}{2}$ .

Diagrama polar para distintos números de polos en el origen, pero un mismo grado relativo.



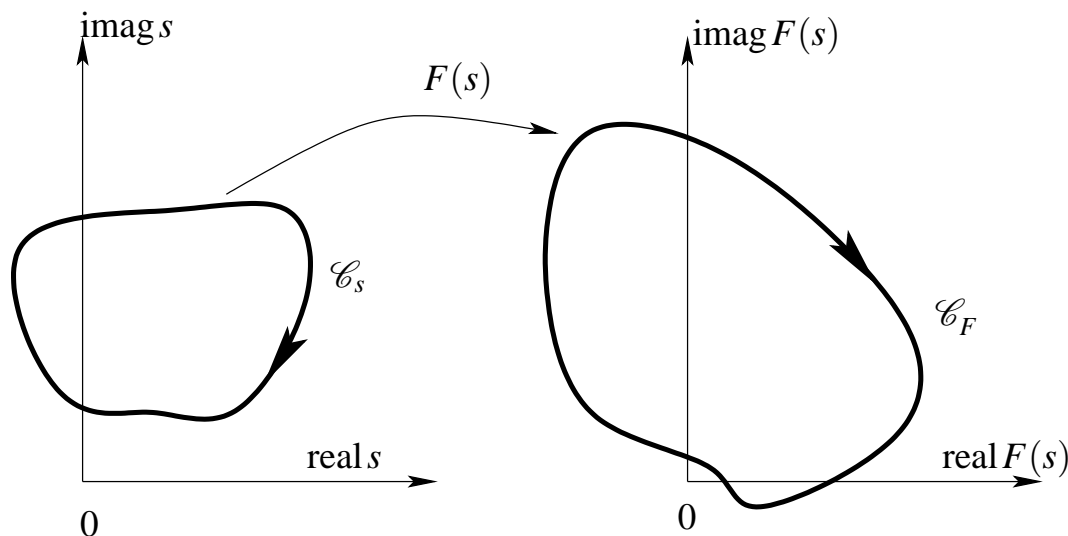
Ejemplo: 1 polo en el origen y grado relativo 4.

$$F(s) = \frac{k_0}{s(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)(\tau_3 s + 1)}$$

## Bases del criterio de Nyquist

Para explicar el criterio de estabilidad de Nyquist consideremos primero una función genérica  $F(s)$ , no necesariamente relacionada a un lazo de control.

Supongamos que se tiene una curva cerrada orientada  $\mathcal{C}_s$  en el plano  $s$  que encierra  $Z$  ceros y  $P$  polos de la función  $F(s)$ . Asumimos que ningún polo se encuentra *sobre* la curva  $\mathcal{C}_s$ .



Al recorrer la curva  $\mathcal{C}_s$  en una dirección, la función  $F(s)$  mapeará  $\mathcal{C}_s$  en otra curva cerrada orientada  $\mathcal{C}_F$  en el plano  $F$ .

Mostraremos que el número de veces que  $\mathcal{C}_F$  encierra al origen del plano  $F$  está dado por la diferencia entre  $P$  y  $Z$ .

Será útil recordar que cada vuelta en sentido horario (*antihorario*) alrededor del origen de una variable compleja implica que la fase de esta variable cambia en  $-2\pi$  rad ( $2\pi$  rad).

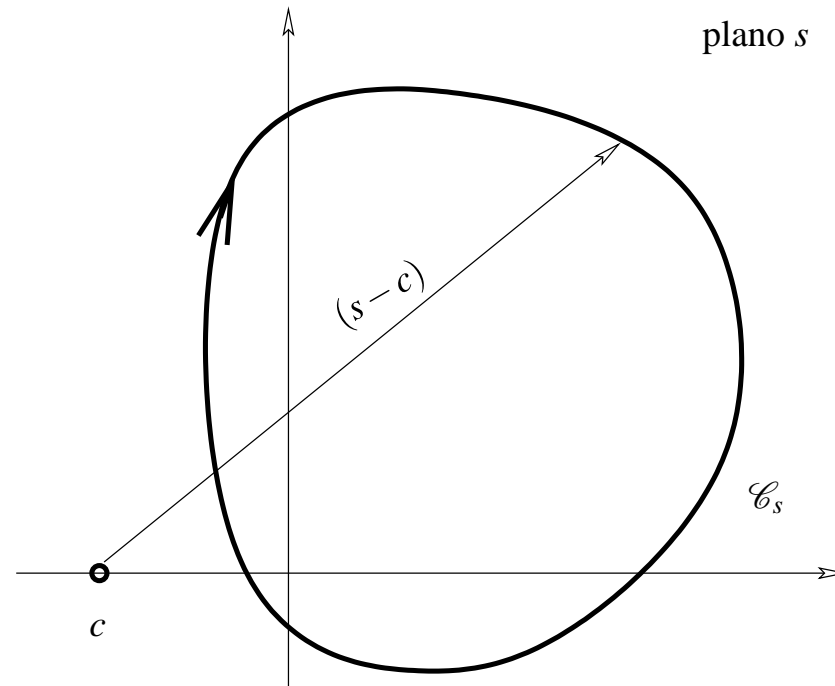
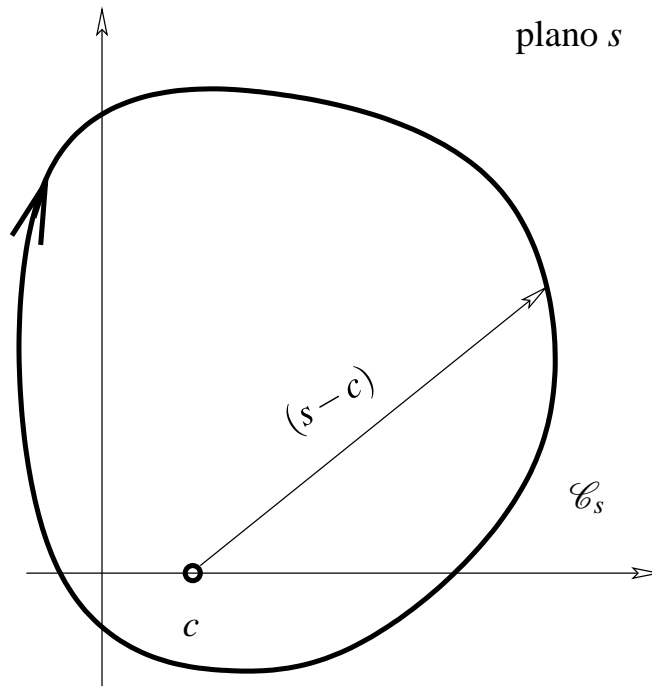
Para empezar, supongamos que

$$F(s) = s - c,$$

donde  $c$  es un punto en el plano  $s$ . Esta es una función simple con un único cero finito en  $c$ . Distinguimos dos casos:

1. El punto  $c$  está dentro de  $\mathcal{C}_s$ . A medida que  $s$  recorre  $\mathcal{C}_s$  en sentido horario, la fase de  $F(s)$  cambia en  $-2\pi$  rad. **Es decir, la curva  $\mathcal{C}_F$  encierra al origen del plano  $F$  una vez en sentido horario.**

2. El punto  $c$  está fuera de  $\mathcal{C}_s$ . A medida que  $s$  recorre  $\mathcal{C}_s$  en sentido horario, la fase de  $F(s)$  cambia en  $0$  rad. **Es decir, la curva  $\mathcal{C}_F$  no encierra al origen del plano  $F$ .**



De forma similar, si la función es

$$F(s) = (s - p)^{-1},$$

podemos ver que a medida que  $s$  recorre  $\mathcal{C}_s$  en sentido horario, la fase de  $F(s)$  cambia en  $+2\pi$  rad si  $p$  se encuentra dentro de  $\mathcal{C}_s$ , y 0 rad si se encuentra fuera de  $\mathcal{C}_s$  (¡pensarlo!).

En el caso general en que

$$(1) \quad F(s) = k \frac{\prod_{i=1}^m (s - c_i)}{\prod_{l=1}^n (s - p_l)}$$

cualquier cambio neto en la fase de  $F(s)$  surge de la suma de los cambios de fase debidos a los factores  $(s - c_i)$  menos la suma de los cambios debidos a los factores  $(s - p_l)$ . En síntesis,



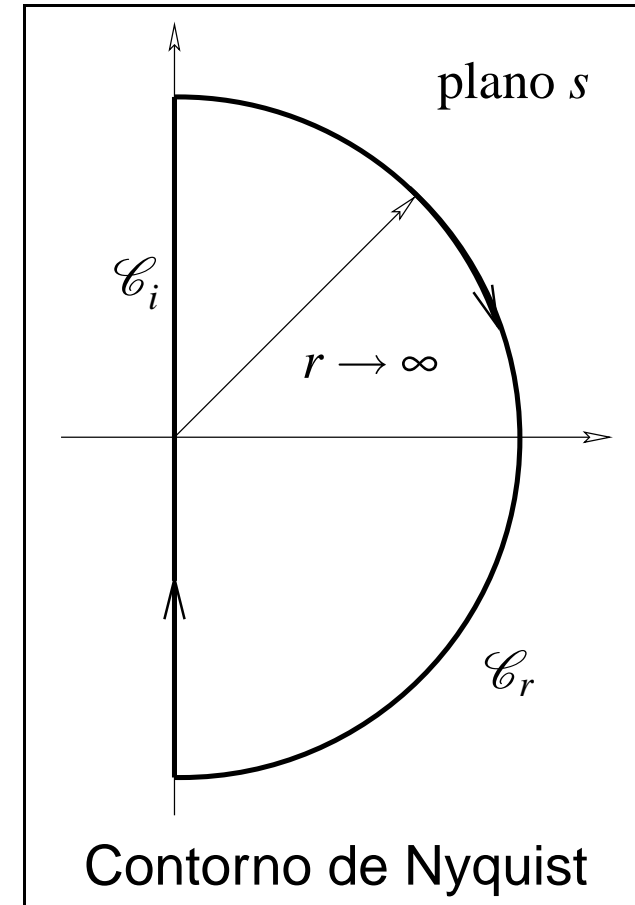
**Versión del Principio del Argumento.** *Sea la función  $F(s)$  dada por (1) y una curva cerrada  $\mathcal{C}_s$  en el plano  $s$ . Sea  $Z$  el número de ceros, y  $P$  el número de polos de  $F(s)$  dentro de la región encerrada por  $\mathcal{C}_s$ . Entonces, a medida que  $s$  recorre en sentido horario  $\mathcal{C}_s$ , la curva  $\mathcal{C}_F$  mapeada por  $F(s)$  encierra  $Z - P$  veces en sentido horario al origen del plano  $F$ .*

Para aplicar esta versión del Principio del Argumento a estudiar estabilidad de sistemas a lazo cerrado, consideramos en particular la función

$$(2) \quad F(s) = 1 + G_0(s)K(s).$$

- Los ceros de  $F(s)$  son los polos a lazo cerrado del sistema de control.
- Los polos de  $F(s)$  son los polos a lazo abierto del sistema de control; es decir, los polos de  $G_0(s)K(s)$ .

Asumimos  $G_0(s)K(s)$  estrictamente propia, es decir,  $\lim_{|s| \rightarrow \infty} F(s) = 1$ .  
 Para analizar la existencia de polos en el semiplano derecho (SPD), usamos como  $\mathcal{C}_s$  el **contorno de Nyquist**.



El contorno de Nyquist es la unión de las curvas  $\mathcal{C}_i$  (el eje imaginario) y  $\mathcal{C}_r$  (un semicírculo de radio infinito). Como  $\lim_{|s| \rightarrow \infty} F(s) = 1$ , el mapeo de  $\mathcal{C}_r$  a través de  $F(s)$  se reduce al punto  $(1, 0)$ , por lo que sólo es necesario graficar la **respuesta en frecuencia**  $F(j\omega)$ .

A medida que  $s$  recorre el contorno de Nyquist, el número de vueltas en sentido horario del mapeo  $F(s) = 1 + G_0(s)K(s)$  alrededor del origen determina el número de ceros en el SPD (polos inestables del sistema a lazo cerrado).

De hecho, típicamente se grafica  $F(s) = G_0(s)K(s)$ , se corre el origen a  $-1$  y se cuenta el número de vueltas en sentido horario alrededor del punto  $(-1, 0)$ .

**Teorema 1. [Criterio básico de Nyquist]** *Si una función transferencia propia a lazo abierto  $G_0(s)K(s)$  tiene  $P$  polos en el semiplano derecho abierto (SPDA), y ninguno sobre el eje imaginario, entonces el sistema a lazo cerrado tiene  $Z$  polos en el SPDA si y sólo si el diagrama de Nyquist de  $G_0(s)K(s)$  encierra  $N = Z - P$  veces en sentido horario al punto  $(-1, 0)$ .  $\square$*

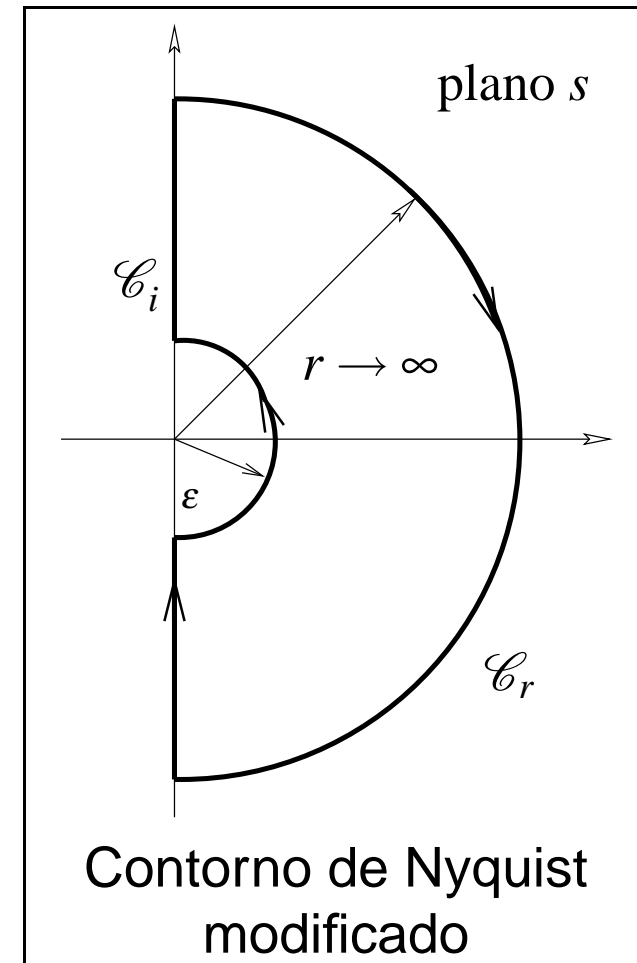
## Implicaciones del Criterio de Nyquist

- Si el sistema es estable a lazo abierto, para que el lazo cerrado sea internamente estable es necesario y suficiente que no haya cancelaciones inestables y que el diagrama de Nyquist de  $G_0(s)K(s)$  **no encierre al punto**  $(-1, 0)$ .
- Si el sistema es inestable a lazo abierto, con  $P$  polos en el SPDA, entonces para que el lazo cerrado sea internamente estable es necesario y suficiente que no haya cancelaciones inestables y que el diagrama de Nyquist de  $G_0(s)K(s)$  **encierre  $P$  veces en sentido antihorario al punto**  $(-1, 0)$ .
- Si el diagrama de Nyquist de  $G_0(s)K(s)$  pasa por el punto  $(-1, 0)$ , existe una frecuencia  $\omega_0 \in \mathbb{R}$  tal que  $F(j\omega_0) = -1$ , es decir, el lazo cerrado tiene polos exactamente sobre el eje imaginario. Esta situación se conoce como **condición de estabilidad crítica**.

¿Cómo aplicar el criterio de Nyquist cuando existen polos a lazo abierto exactamente sobre el eje  $j\omega$ , por ejemplo, en el origen?

En estos casos no puede usarse el contorno de Nyquist visto — no podría calcularse el cambio de fase al pasar  $s = 0$  — y debe usarse un **contorno de Nyquist modificado**.

El contorno de Nyquist modificado se compone de tres curvas:  $\mathcal{C}_r$ ,  $\mathcal{C}_i$  y  $\mathcal{C}_\varepsilon$ . A medida que  $\varepsilon \rightarrow 0$  y  $r \rightarrow \infty$ , la región encerrada aún se expande a el SPDA, excepto por un área infinitesimal.

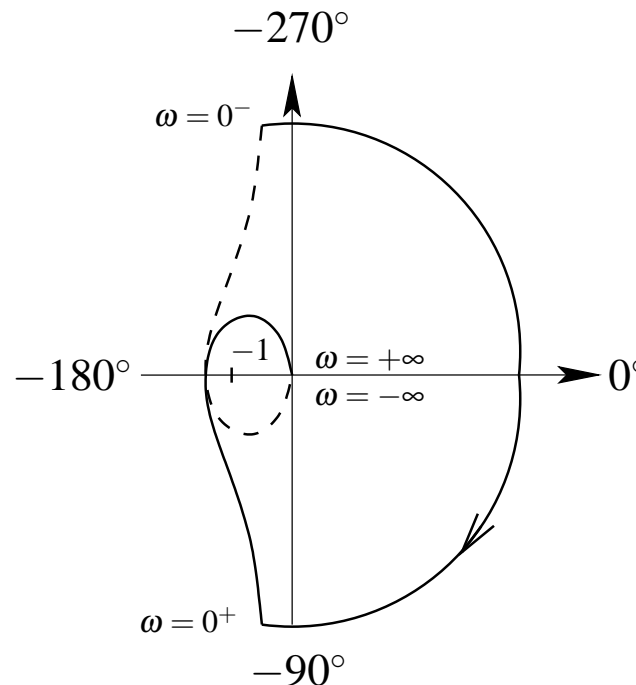
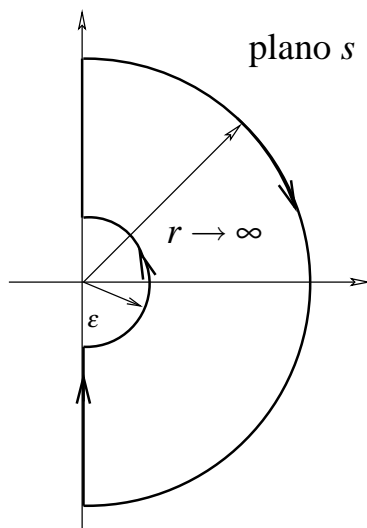


**Teorema 2. [Criterio de Nyquist]** *Dada una función transferencia propia  $G_0(s)K(s)$  con  $P$  polos en el SPDA, entonces el lazo cerrado tiene  $Z$  polos en el SPDA si y sólo si el diagrama de Nyquist de  $G_0(s)K(s)$  encierra  $N = Z - P$  veces en sentido horario al punto  $(-1, 0)$  cuando  $s$  recorre el contorno de Nyquist modificado.*

## Ejemplo: Consideremos el sistema

$$G_0(s)K(s) = \frac{k_0}{s(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}.$$

Este sistema puede ser inestable si se aumenta suficientemente la ganancia  $k_0$ .



$$P = 0$$

$$N = 2$$

$$Z = N + P = 2$$

Sistema a lazo cerrado inestable

# Estabilidad relativa: Márgenes de estabilidad

En el diseño de sistemas de control a menudo se necesita ir más allá de la cuestión de estabilidad a lazo cerrado. En particular, usualmente es deseable obtener alguna medida cuantitativa de cuán lejos de ser inestable está un lazo nominal; es decir, **cuantificar la estabilidad relativa del lazo**.

Esta cuantificación puede lograrse definiendo medidas que describan la distancia de la respuesta en frecuencia nominal al punto de estabilidad crítica  $(-1, 0)$ .

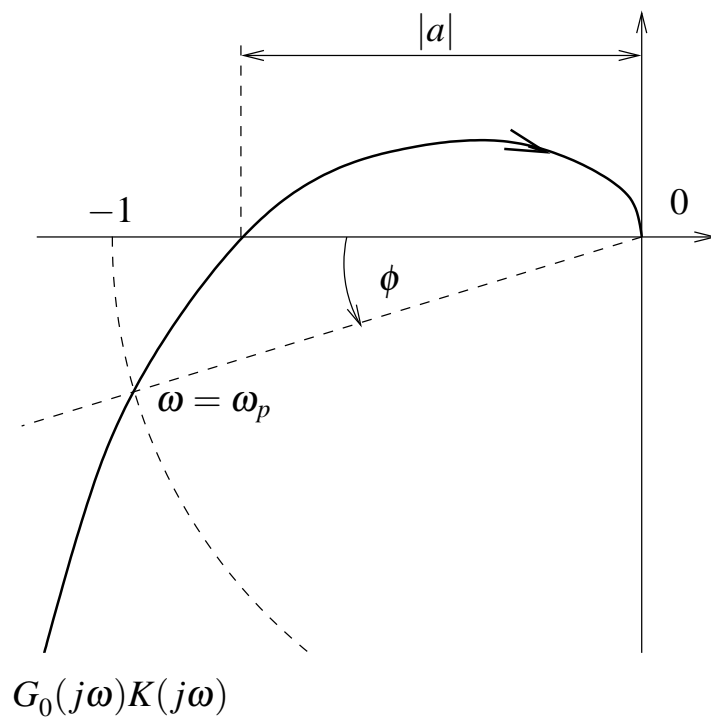


# Márgenes de ganancia y fase

Definimos margen de ganancia  $M_g$  y margen de fase  $M_f$

$$(3) \quad M_g \triangleq -20 \log_{10}(|a|)$$

$$(4) \quad M_f \triangleq \phi$$



$G_0(j\omega)K(j\omega)$

Márgenes de ganancia y fase.

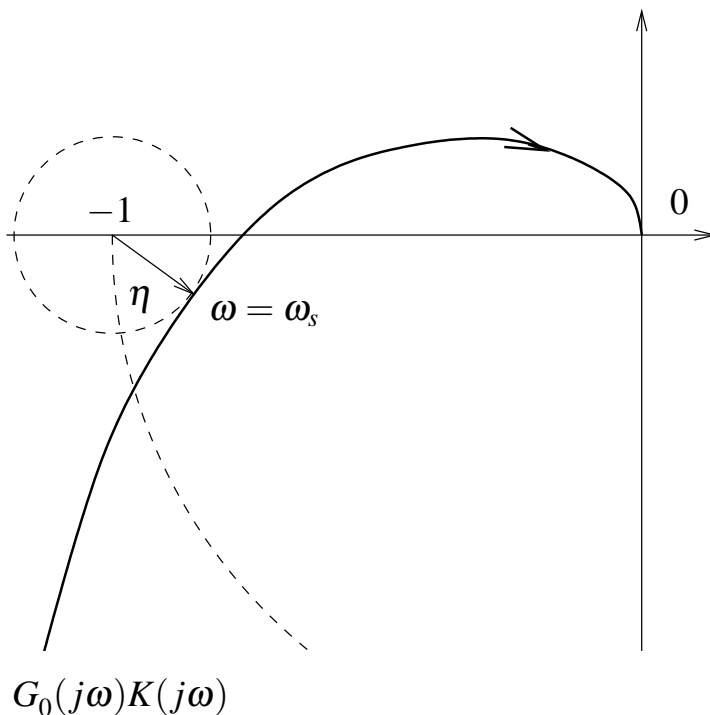
El margen de ganancia marca la ganancia adicional que llevaría el lazo cerrado a la condición de estabilidad crítica.

El margen de fase cuantifica el retardo de fase puro que debería agregarse para alcanzar la misma condición de estabilidad crítica.

## Pico de sensibilidad

Un indicador alternativo de estabilidad relativa es el **pico de la función de sensibilidad**. Notemos que el vector desde el punto  $(-1, 0)$  a  $G_0(j\omega)K(j\omega)$ , para  $\omega = \omega_1$ , corresponde a

$$1 + G_0(j\omega)K(j\omega) = |S_0(j\omega_1)|^{-1}.$$



Pico de sensibilidad

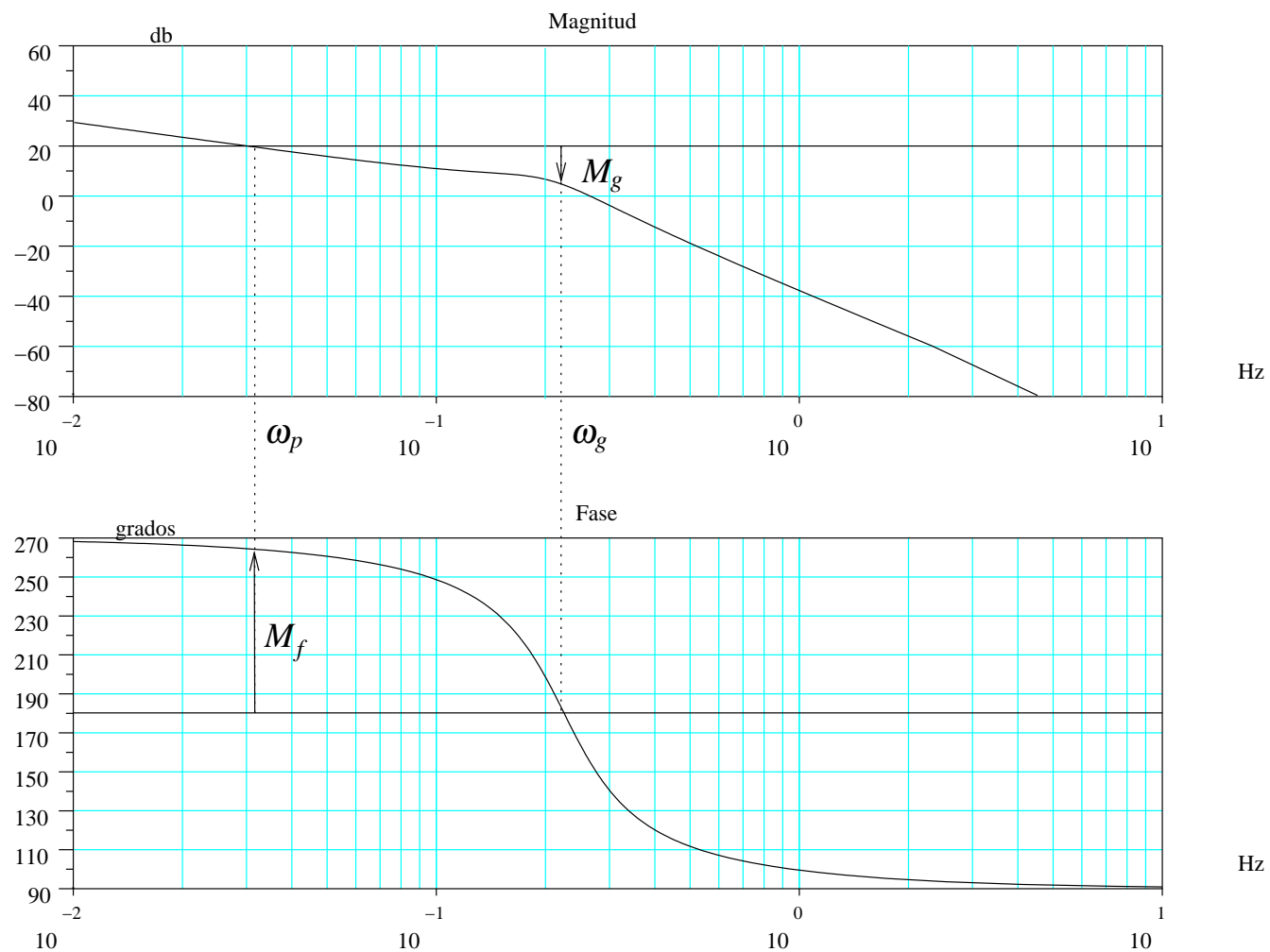
El radio  $\eta$  del círculo tangente al gráfico de  $G_0(j\omega)K(j\omega)$  es la recíproca del **pico de la sensibilidad nominal**. Cuanto mayor sea este pico, más cerca de la inestabilidad estará el lazo.

El pico de sensibilidad es un indicador de estabilidad relativa más confiable que los márgenes de fase y ganancia: un sistema puede tener buenos márgenes de fase y ganancia y aún estar cerca de ser inestable.

Por otro lado, un bajo valor del pico de sensibilidad garantiza márgenes de ganancia y fase mínimos.

# Márgenes de estabilidad y diagramas de Bode

Los márgenes de estabilidad pueden describirse y cuantificarse también en diagramas de Bode.



# Robustez

Hasta ahora sólo hemos considerado el efecto que el controlador tiene sobre el lazo cerrado formado con el modelo nominal de la planta. Sin embargo, en la práctica no sólo nos interesa este desempeño nominal, sino también el desempeño realmente alcanzado cuando el controlador se aplique a la planta real.

Esta es la así llamada cuestión de **robustez**. Veremos cómo las funciones de sensibilidad nominal brindan información sobre las sensibilidades reales del lazo.

## Error multiplicativo de modelado

Introducimos el **modelo de error multiplicativo** (MEM), que se define por

$$G(s) = G_0(s)(1 + G_\Delta(s)),$$

es decir, el error entre **modelo nominal**  $G_0(s)$  y **modelo de calibración**  $G(s)$  es

$$G_\Delta(s) = \frac{G(s)}{G_0(s)} - 1.$$

El error  $G_\Delta(s)$  es en general desconocido, pero muchas veces es posible cuantificar una cota conocida del tipo

$$|G_\Delta(j\omega)| < \varepsilon(\omega).$$

## Funciones de sensibilidad alcanzadas

Contrastamos las sensibilidades derivadas anteriormente con las realmente alcanzadas (o verdaderas) cuando el controlador se aplica al **modelo de calibración**  $G(s)$ .

$$\begin{aligned}T(s) &= \frac{G(s)K(s)}{1 + G(s)K(s)} = \frac{B(s)P(s)}{A(s)L(s) + B(s)P(s)} \\S(s) &= \frac{1}{1 + G(s)K(s)} = \frac{A(s)L(s)}{A(s)L(s) + B(s)P(s)} \\S_i(s) &= \frac{G(s)}{1 + G(s)K(s)} = \frac{B(s)L(s)}{A(s)L(s) + B(s)P(s)} \\S_u(s) &= \frac{K(s)}{1 + G(s)K(s)} = \frac{A(s)P(s)}{A(s)L(s) + B(s)P(s)}\end{aligned}$$

# Funciones de sensibilidad reales y error de modelado con MEM

Las funciones de sensibilidad reales pueden escribirse en términos de las nominales.

$$S(s) = S_0(s)S_{\Delta}(s)$$

$$T(s) = T_0(s)(1 + G_{\Delta}(s))S_{\Delta}(s)$$

$$S_i(s) = S_{i0}(s)(1 + G_{\Delta}(s))S_{\Delta}(s)$$

$$S_u(s) = S_{u0}(s)S_{\Delta}(s)$$

donde

$$S_{\Delta}(s) \triangleq \frac{1}{1 + T_0(s)G_{\Delta}(s)},$$

con  $G_{\Delta}(s)$  el modelo de error multiplicativo.



## Estabilidad robusta

Consideramos el caso en que el modelo nominal y la planta verdadera difieren. En este caso es necesario que, además de la estabilidad nominal, debamos chequear si la estabilidad se mantiene cuando la verdadera planta se controle con el controlador que alcanzaba estabilidad del lazo nominal.

Cuando un controlador mantiene la estabilidad del lazo al aplicarse a la planta verdadera, decimos que el controlador provee **estabilidad robusta**.

**Teorema 3. [Estabilidad robusta]** *Sea una planta con modelo nominal  $G_0(s)$  y transferencia real  $G(s)$ . Supongamos que  $K(s)$  es un controlador que alcanza estabilidad interna nominal. Supongamos además que  $G(s)K(s)$  y  $G_0(s)K(s)$  tienen el mismo número de polos inestables. Entonces si*

$$(5) \quad |T_0(j\omega)G_\Delta(j\omega)| < 1$$

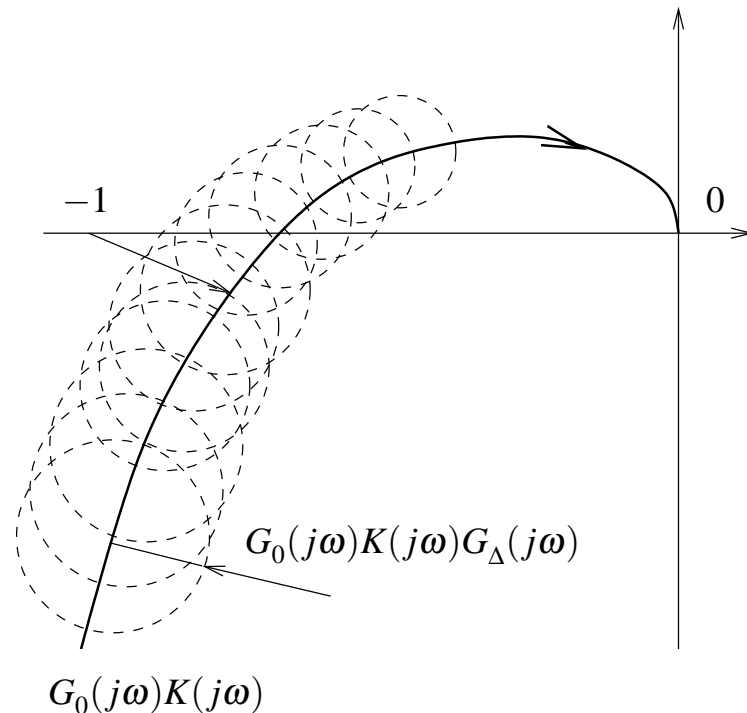
*el controlador  $K(s)$  alcanza además estabilidad del lazo real.*



Notemos que la condición (5) puede escribirse de la forma

$$(6) \quad |G_0(j\omega)K(j\omega)G_\Delta(j\omega)| < |1 + G_0(j\omega)K(j\omega)|.$$

Es decir, la estabilidad es robusta frente a un MEM  $G_\Delta(s)$  si el punto de estabilidad crítica  $(-1, 0)$  se encuentra fuera del disco de centro  $G_0(j\omega)K(j\omega)$  y radio  $G_0(j\omega)K(j\omega)G_\Delta(j\omega)$  para todo  $\omega$ .



Vemos que un pico elevado de sensibilidad hace  $|1 + G_0(j\omega)K(j\omega)|$  pequeño en (6), disminuyendo la tolerancia a error de modelado MEM para preservar estabilidad robusta.